Table des matières :

Chapitre I : Représentation d'état des systèmes linéaires continus…………2

I. Introduction……………………………………………………………..…..3
II. Représentation d'état…………………………………...…………..3
III. Résolution de l'équation d'état……………………………………….4
IV. Passage de la représentation d'état vers la FT………..…………6
V. Passage de la FT vers la représentation d'état…………………...…7

Chapitre II : Représentation d'état des systèmes échantillonnés………..…9

I. Introduction…………………………………………………...……..10
II. Passage de la représentation d'état vers la FT…………...…….12
III. Passage de la FT vers la représentation d'état…………...…….12

Chapitre III : Commandabilité et Observabilité des systèmes linéaires…..15

I. Introduction………………………………………………………16
II. Commandabilité……………………………………..…………16
III. Observabilité…………………………………………………..…17
IV. Relation entre FT et Commandabilité et Observabilité……...……19
V. Commandabilité et observabilité des systèmes élémentaires…..…21

Chapitre IV : Commande dans l'espace d'état……………………………...28

I. Introduction………………………………………………………29
II. Commande par retour d'état (Modale)……………………..……..29

Chapitre V : Synthèse des observateurs…………………………………..…33

I. Introduction……………………………………………………..34
II. Synthèse d'un observateur…………………..………………34
III. Bilan : Système+ Observateur + Commande……………………..35

Références Bibliographiques……………………………………..………..38

Chapitre I :

Représentation d'état des systèmes linéaires continus

Chapitre I :

Représentation d'état des systèmes linéaires continus

I. Introduction

Le modèle donné par la fonction de transfert est un modèle qui donne la relation entrée / sortie du système. C'est pour cette raison ce type de modélisation est classé parmi les représentations externes. Cependant, si on s'intéresse à l'évolution des variables internes, ce type de représentation trouve inconvénient. Pour cette raison, il est nécessaire d'avoir d'autres types de représentation de type internes.

D'un autre côté, les systèmes non linéaires ne peuvent pas être modélisés par des fonctions de transfert.

Comme remède à tous ces inconvénients, on propose le modèle donné par la représentation d'état.

II. Représentation d'état

Un système linéaire continu est donné par une équation différentielle homogène a coefficients constants d'ordre n.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y + a_0 = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u + b_0$$

Le modèle donné par fonction de transfert est :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

Le modèle donné par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec :

$X(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \cdots\ x_n(t)\ )^t$ Vecteur état

$x_i(t)$; Variable d'état

$A\ (n, n)$ Matrice d'état ou matrice caractéristique

$u(t)$: vecteur d'entrée, on suppose qu'il y a p entrées

$y(t)$: Vecteur de sortie, on suppose qu'il y a q sorties

$B\ (n, p)$: Matrice d'entrée ou commande

$C\ (q, n)$ Matrice de sortie ou d'observation

$D\ (q, p)$: Matrice de couplage E/S

Pour un système mono-variable, $D\ (1,1) = cst$ cette $cst = 0\ si\ n > m$ et $cst \neq 0\ si\ n = m$.

Remarque :

1. La représentation d'état n'est pas unique. Tout va dépendre du choix des variables d'état.
2. Toutes les représentations d'état ont un nombre de variable minimal qui est égal à l'ordre du système.
3. Les variables d'états peuvent avoir un sens physique ou non.

III. Résolution de l'équation d'état

L'équation d'état est donné par une équation différentielle d'ordre 1 donné par :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \qquad \text{(Eq 1)}$$

Solution sans second membre: (en régime libre $u(t) = 0$)

$$X(t) = e^{At}K$$

Solution en régime forcé : par la méthode de la variation des constantes la solution globale est donnée par :

$$X(t) = e^{At}K(t)$$

Tout le problème consiste à déterminer $K(t)$

$$\dot{X}(t) = Ae^{At}K(t) + e^{At}\dot{K}(t)$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + e^{At}\dot{K}(t) \qquad \text{(Eq.2)}$$

Par identification Eq. 1 et Eq. 2

$$e^{At}\dot{K}(t) = Bu(t) \;\; \Rightarrow \;\; \dot{K}(t) = \;\; e^{-At}Bu(t)$$

par intégration entre $[0,\ t]$, nous obtenons :

$$\boxed{X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}$$

Calcul de e^{At}

Propriétés :

- $A\ (n,n)$ donc $e^{At}\ (n,n)$
- $e^{At}.e^{Bt} = e^{Bt}.e^{At}$
- $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A.e^{At} = e^{At}.A$
- $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(At)^n}{n!}$

Cas Particuliers :

- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \;\rightarrow\; e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\rightarrow\; e^{At} = e^{aT}\begin{pmatrix} \cos(bT) & \sin(bT) \\ -\sin(bT) & \cos(bT) \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{At} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Forme quelconque

Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour calculer l'exponentiel d'une matrice. Dans ce que suit nous proposons la méthode la plus simple celle de Laplace. Le principe est comme suit :

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{p-a} = (p-a)^{-1}$$

Par analogie avec les matrices :

$$\mathcal{L}(e^{At}) = (pI - A)^{-1}$$

Par la suite :

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(\,(pI - A)^{-1})}$$

IV. Passage de la représentation d'état vers la Fonction de transfert

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX(p) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(p) = (pI - A)^{-1}BU(p) \\ Y(p) = C(pI - A)^{-1}BU(p) + DU(p) \end{cases}$$

Finalement !

$$\boxed{F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D}$$

V. Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état

Il existe plusieurs formes de la représentation d'état pour le même système, donc pour la même fonction de transfert.

1. Forme canonique de commandabilité !

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_m \quad \cdots \quad b_0 \quad 0 \quad 0)$$

2. Forme canonique d'observabilité

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 1 & 1 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_m \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)$$

3. Forme modale

Comme pour le cas continu, nous avons 3 cas de figure selon le type des pôles de la fonction de transfert du système.

a. Cas1 : pôles simples réels

En décomposant en éléments simple nous obtenons :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\propto_1}{p-\lambda_1} + \frac{\propto_2}{p-\lambda_2} + \ \ldots + \frac{\propto_n}{p-\lambda_n}$$

Par analogie avec le développement du cas continu, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\propto_1 \quad \ldots \quad \propto_n)$$

b. Cas2 : Pôles multiples réels

Soit λ un pôle d'ordre n. En décomposant en éléments simple nous obtenons :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\beta_n}{(p-\lambda)^n} + \frac{\beta_{n-1}}{(p-\lambda)^{n-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{(p-\lambda)}$$

Par analogie avec le développement du cas continu, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\ \beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \ldots \quad \beta_1)$$

c. Cas3 : Pôles complexes conjugués

$$F(p) = \frac{\alpha + j\beta}{p-(a+jb)} + \frac{\alpha - j\beta}{p-(a-jb)}$$

Par la suite :

$$A = \begin{pmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\alpha + j\beta \quad \alpha - j\beta)$$

Chapitre II :

Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés

Chapitre II :

Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés

I. Introduction

Le modèle analogique d'un système linéaire continu donné par une fonction de transfert est :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

le modèle numérique correspondant est donné par

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = Z(B_0(p).F(p))$$

avec $B_0(p)$ est le bloquer d'ordre 0 (autrement dit c'est le CNA.

Le modèle analogique d'un système linéaire continu donné par une représentation d'état est donné par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \text{Eq (1)}$$

Le modèle numérique correspondant est donné par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A'X_k + B'u_k \\ y_k = C'X_k + D'u_k \end{cases} \qquad \text{Eq (2)}$$

la question est de chercher $A', B', C' \; et \; D'$ en fonction de $A, B, C \; et \; D$.

Pour cela on va discrétiser le signal $X(t)$.

On a

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Pour $t = T$ on a :

$$X(T) = e^{At}X(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

D'une façon générale entre deux instants d'échantillonnage consécutifs on a :

$$X(k+1) = e^{At}X(k) + \int_0^T e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad \text{Eq (3)}$$

par identification entre Eq (2) et Eq (3) nous avons :

$$\boxed{A' = e^{At}}$$

et

$$B'u_k = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Puisque le système est précédé par un bloqueur d'ordre 0, nous avons entre deux instants d'échantillonnages

$$u(\tau) = u(k) pour\ \tau\ entre\ [k, k+1)$$

Soit donc :

$$\boxed{B' = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bd\tau}$$

D'autre part :

$$y(t) = CX(t) + Du(t)$$

Le signal discrétisé est:

$$y(k) = CX(k) + Du(k) \qquad \text{Eq(4)}$$

Finalement par identification entre Eq(2) et Eq(4) nous avons :

$$\boxed{C' = C \qquad et \qquad D' = D}$$

II. Passage de la représentation d'état vers la Fonction de transfert

$$\begin{cases} X(k+1) = AX(k) + Bu(k) \\ y(k) = CX(k) + Du(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} zX(z) = AX(z) + Bu(z) \\ y(z) = CX(z) + Du(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(z) = (zI - A)^{-1}Bu(z) \\ y(z) = C(zI - A)^{-1}Bu(z) + Du(z) \end{cases}$$

Finalement !

$$\boxed{F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI - A)^{-1}B + D}$$

III. Passage de la fonction de transfert vers la représentation d'état

Puisque les propriétés de la transformée de Laplace sont presque les mêmes on tombe bien sur les mêmes relations de passage que celles du système continu.

1. Forme canonique de commandabilité !

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (b_m \quad \cdots \quad b_0 \quad 0 \quad 0)$$

2. Forme canonique d'observabilité

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 1 & 1 & -a_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_m \\ \vdots \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1)$$

3. Forme modale

Comme pour le cas continu, nous avons 3 cas de figure selon le type des pôles de la fonction de transfert du système.

- **Cas1 : pôles simples réels**

En décomposant en éléments simple nous obtenons :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\propto_1}{z - \lambda_1} + \frac{\propto_2}{z - \lambda_2} + \ \dots + \frac{\propto_n}{z - \lambda_n}$$

Par analogie avec le développement du cas continu, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\propto_1 \quad \dots \quad \propto_n)$$

- **Cas2 : Pôles multiples réels**

Soit λ un pôle d'ordre n. En décomposant en éléments simple nous obtenons :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_n}{(z-\lambda)^n} + \frac{\beta_{n-1}}{(z-\lambda)^{n-1}} + \cdots + \frac{\beta_1}{(z-\lambda)}$$

Par analogie avec le développement du cas continu, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \dots \quad \beta_1)$$

- **Cas3 : Pôles complexes conjugués**

$$F(z) = \frac{\alpha + j\beta}{z-(a+jb)} + \frac{\alpha - j\beta}{z-(a-jb)}$$

Par la suite :

$$A = \begin{pmatrix} a+jb & 0 \\ 0 & a-jb \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (\alpha + j\beta \quad \alpha - j\beta)$$

Chapitre III :

Commandabilité et observabilité des systèmes linéaires

Chapitre III :

Commandabilité et observabilité des systèmes linéaires

I. Introduction :

Deux questions qui se posent lors de la commande d'un système :

Q1 : Peut-on agir sur les entrées du système pour ramener le système d'une situation initiale donnée vers une situation finale désirée ?

$\Rightarrow$ Problème de commandabilité

Q2 : En observant les entrées sorties du système, peut-on estimer l'état du système ?

$\Rightarrow$ Problème d'observabilité

II. Commandabilité

1. Définition :

Un système est dit commandable, si et seulement si en agissant sur les entrées nous pouvons ramener le système d'une situation initiale donnée vers une situation finale quelconque.

NB : Le terme quelconque signifie dans l'espace admissible par l'état du système.

2. Critère de commandabilité

a. Cas continu

Un système continu donné par $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ est dit commandable, si et seulement si

$$Rang(\varphi) = n$$

avec

$\varphi = (B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$: Matrice de commandabilité

$n = dimX(t)$

b. Cas Discret

Un système échantillonné donné par $X_{k+1} = AX_k + Bu_k$ est dit commandable, si et seulement si

$$Rang(\varphi) = n$$

avec : $\varphi = (B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B)$: Matrice de commandabilité

$n = dimX_k$

III. Observabilité

1. Définition

Un système est observable si et seulement si, en observant le couple E/S au cours du temps nous pouvons déduire l'état initial.

2. Critère d'observabilité

a. Cas continu

Un système donné par : $\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$ est observable, si et seulement si :

$$Rang(O) = n$$

avec : $O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ Matrice d'observabilité et $n = dimX(t)$

b. Cas discret

Un système donné par : $\begin{cases} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k + Du_k \end{cases}$ est observable si et seulement si :

$$Rang(O) = n$$

avec

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \text{ Matrice d'observabilité}$$

$$n = dimX_k$$

Exemple

Un système est décrit par la figure 1.

1. Donner l'équation d'état du système en considérant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$
2. Posons $\tau_1 = R_1C_1 \; et \; \tau_2 = R_2C_2$, discuter selon τ_1 et τ_2 la commandabilité du système.

Réponse :

1. $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\tau_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} \\ \frac{1}{\tau_2} \end{pmatrix}$
2. $\varphi = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_1^2} \\ \frac{1}{\tau_1} & -\frac{1}{\tau_2^2} \end{pmatrix}$;

   $det(\varphi) = \frac{1}{\tau_1\tau_2}\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right)$

   $\det(\varphi) \neq 0 \Leftrightarrow \tau_1 \neq \tau_2$

Exemple2 :

Considérons le même système de l'exemple1.

1. La sortie du système est $y(t) = x_1(t)$, discuter selon τ_1 et τ_2l'observabilité du système.

2. Même question pour $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$

Réponse :

1. Quel que soit τ_1 et τ_2 le système n'est pas observable
2. Le système est observable ssi $\tau_1 \neq \tau_2$

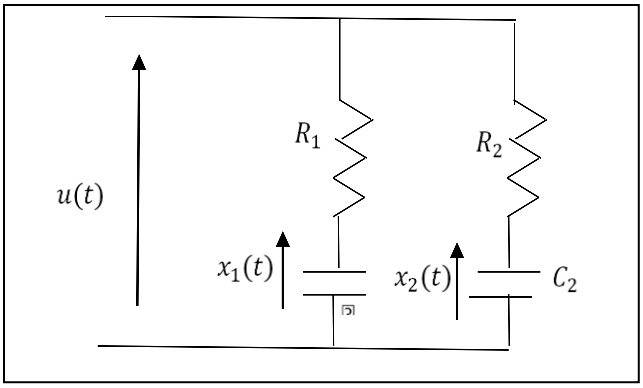


Figure 1

IV. Relation entre les notions de la commandabilité et l'observabilité et fonction de transfert

Pour établir telle relation nous allons commencer par un exemple typique.

Exemple

Un système est donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) + Du(t) \end{cases}$$

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

La fonction de transfert du système globale est :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C(pI - A)^{-1}B + D = \frac{1}{p+1}$$

Nous pouvons toujours trouver un changement de variables tel que :

$$X(t) = T.Z(t)$$

ce qui donne

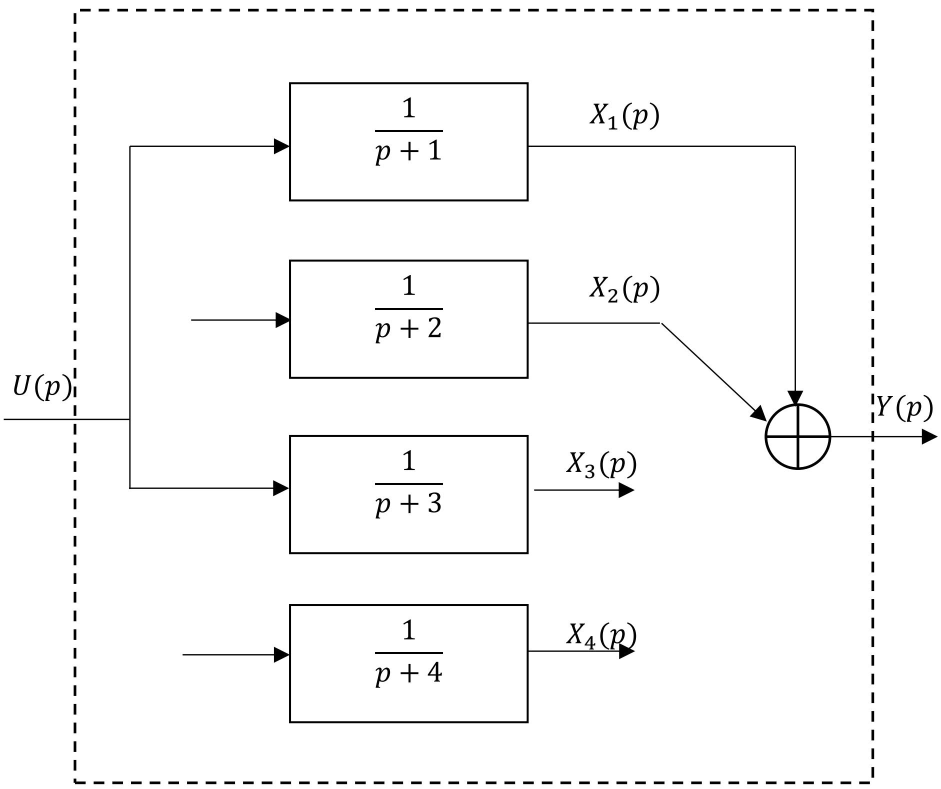
$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A'Z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'Z(t) + D'u(t) \end{cases}$$

avec :

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C' = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$$

Schématiquement nous allons représenter le système par la figure suivante :



Théorème :

Un mode (un système) de premier ordre est commandable s'il est lié à l'entrée et observable s'il est lié à la sortie.

Observations :

Le sous-système (S1) est à la fois commandable et observable

Le sous-système (S2) est non commandable mais observable

Le sous-système (S1) est commandable et non observable

Le sous-système (S1) est non commandable et non observable

Le sous-système (S1) est le seul qui est commandable et observable et sa fonction de transfert est la même que celle du système global.

Conclusions :

- La fonction de transfert représente uniquement les parties commandables et observable du système.
- Si le $deg(FT) < dim(X(t))$ alors il y a des parties qui sont non commandables et/ou non observables
- Si le $deg(FT) = dim(X(t))$ alors le système est complètement commandable et complètement observable.

V. Commandabilité et observabilité des systèmes élémentaires

1. Cas continu :

Un système donné par une représentation donnée :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}$$

Nous pouvons toujours trouver un changement de variables tel que :

$$X(t) = T.Z(t)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A'Z(t) + B'u(t) \\ y(t) = C'Z(t) \end{cases}$$

avec : $$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & & & \\ & & & a & b & & & & \\ & & & -b & a & & & & \\ & & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \\ h_\alpha \\ h_\beta \\ h_i \\ \vdots \\ \vdots \\ h_j \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_k & l_\alpha & l_\beta & l_i & \ldots & \ldots & l_j \end{pmatrix}$$

Nous pouvons déduire trois types de systèmes selon le type des valeurs proposé.

Système de Type I : VP simples réelles

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$$

$$C = (l_1 \quad \ldots \quad l_k)$$

Conditions de commandabilité et observabilité

<u>Cas ; $k = 2$</u>

$$\varphi = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} h_1 & \lambda_1 h_1 \\ h_2 & \lambda_2 h_2 \end{pmatrix}$$

$$det(\varphi) = h_1 h_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$det(\varphi) \neq 0 \;\; ssi \;\; h_1 \neq 0 \;\; et \; h_2 \neq 0$$

D'une façon générale le système de type I est commandable si tous les coefficients du vecteur de commande sont nuls.

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ \lambda_1 l_1 & \lambda_2 l_2 \end{pmatrix}$$

$$det(O) = l_1 l_2 (\lambda_1 - \lambda_2)$$

$$det(O) \neq 0 \quad ssi \;\; l_1 \neq 0 \;\; et \; l_2 \neq 0$$

D'une façon générale le système de type I est observable si tous les coefficients du vecteur de sortie sont nuls

Système de Type II : VP Complexes conjuguées

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} l_\alpha & l_\beta \end{pmatrix}$$

Conditions de commandabilité et observabilité

$$\varphi = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} h_\alpha & a h_\alpha + b h_\beta \\ h_\beta & -b h_\alpha + a h_\beta \end{pmatrix}$$

$$det(\varphi) = -b\left({h_\alpha}^2 + {h_\beta}^2\right)$$

$$det(\varphi) \neq 0 \quad ssi \quad \begin{pmatrix} h_\alpha \\ h_\beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} l_\alpha & l_\beta \\ a l_\alpha - b l_\beta & b l_\alpha + a l_\beta \end{pmatrix}$$

$$det(O) = \; b\left({l_\alpha}^2 + {l_\beta}^2\right)$$

$$det(O) \neq 0 \quad ssi \ (l_\alpha \quad l_\beta) \neq (0 \quad 0)$$

Système de Type III : VP Multiples

Soit λ une valeur propre d'ordre $'n'$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} h_i \\ \vdots \\ \vdots \\ h_j \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} l_i & \dots & \dots & l_j \end{pmatrix}$$

Conditions de commandabilité et observabilité

<u>Cas ; $k = 2$</u>

$$\varphi = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} h_i & \lambda h_i + h_j \\ h_j & \lambda h_j \end{pmatrix}$$

$$det(\varphi) = -h_j^2$$

$$det(\varphi) \neq 0 \quad ssi \quad h_j \neq 0$$

D'une façon générale, un système de type III est commandable si le dernier élément du vecteur de commande est nul.

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i & l_j \\ \lambda l_i & l_i + \lambda l_j \end{pmatrix}$$

$$det(O) \neq 0 \quad ssi \ l_i \neq 0$$

D'une façon générale, un système de type III est observable si le premier élément du vecteur de sortie est nul.

Cas Discret :

Le système échantillonné correspondant est donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} X_{k+1} = A'X_k + B'u_k \\ y_k = C'X_k \end{cases}$$

avec

$$A' = e^{At} \qquad B' = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B d\tau \qquad\qquad C' = C$$

Théorème !

- Un système échantillonné est commandable (respectivement observable) Alors le système continu correspondant est commandable (respectivement observable)
- Un système échantillonné est commandable (respectivement observable) SI :
    - ✓ le système continu correspondant est commandable (respectivement observable)
    - ✓ Si $Rel(\lambda_i) = Rel(\lambda_j)$ Alors $Im(\lambda_i - \lambda_j) \neq \frac{2k\pi}{T}$

Constatation :

Ce théorème veut dire que la commandabilité et l'observabilité sont affectées par la période d'échantillonnage uniquement pour le cas du système de type II (Les valeurs propres sont complexes conjuguées)

En effet :

Le Système de type I est donné par :

$$A' = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C' = C = (l_1 \quad \dots \quad l_k)$$

Nous allons démontrer les choses pour le cas de l'observabilité (plus simple)

<u>**cas ; $k = 2$**</u>

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \\ e^{\lambda_1 t} l_1 & e^{\lambda_2 t} l_2 \end{pmatrix}$$

$$det(O) = l_1 l_2 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}\right)$$

$$det(O) \neq 0 \quad ssi \quad l_1 \neq 0 \;\; et \; l_2 \neq 0$$

C'est exactement la même condition que celle du système continu et la période d'échantillonnage n'a aucune influence sur l'observabilité.

Système de Type II :

Le système continu est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = (l_\alpha \quad l_\beta)$$

Le système échantillonné correspondant est donné par :

$$A' = e^{aT} \begin{pmatrix} \cos(bT) & \sin(bT) \\ -\sin(bT) & \cos(bT) \end{pmatrix} \quad C' = C = (l_\alpha \quad l_\beta)$$

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$$

$$det(O) \neq 0 \quad ssi \begin{cases} l_1 \neq 0 \;\; et \; l_2 \neq 0 \\ b \neq \dfrac{k\pi}{T} \end{cases}$$

Exercice :1

Un système est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \quad 0)$$

1. Etudier la commandabilité et l'observabilité de système
2. Déterminer la représentation d'état du système échantillonné correspondant
3. Déterminer la fonction de transfert du système échantillonné
4. Conclure sur le choix de la période d'échantillonnage

Exercice 2

Un système est donné par la représentation d'état suivante : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$

Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C = (2 \quad 8 \quad 0 \quad 0)$.

1. Monter que le système est commandable.
2. Donner la fonction de transfert du système
3. Le système est ‘il stable ? expliquer.
4. Le système est-il stabilisable ? expliquer.

Exercice 2 :

Un système est donné par la représentation d’état suivante : $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = cx \end{cases}$

Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = (0 \quad 2)$;

1. Etudier la commandabilité et l’observabilité du système.
2. Donner la représentation d’état discrète
3. Calculer la fonction de transfert en Z
4. Discuter le choix de la période échantillonnage pour ne pas perdre en commandabilité et en observabilité.

Exercice 3 :

Un système est donné par la dynamique suivante :

$$\ddot{\theta}(t) + \theta(t) = u(t)$$

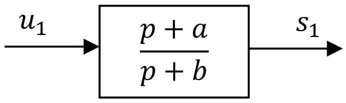
Où $u(t)$ est l’entrée du système. On dispose d’un capteur pour mesurer la sortie $y(t) = \theta(t)$.

1. Donner une représentation d’état en faisant le choix $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ comme vecteur d’état.
2. Donner la représentation d’état du système échantillonné
3. Discuter le choix de la période échantillonnage.

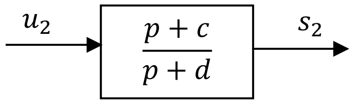
Exercice 1 :

On donne deux systèmes S1 et S2

(S1) :

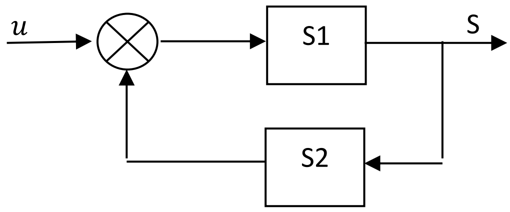


(S2) :



1. Donner la représentation d'état, sous la forme canonique d'observabilité, de chacun de systèmes. En déduire les conditions de commandabilité et d'observabilité de chaque système.
2. En utilisant les représentations d'état données dans la question 1), proposer une représentation d'état du système (S3) donné par la figure suivante :

(S3) :



Chapitre IV :

Commande dans l’espace d’état

Chapitre IV :

Commande dans l’espace d’état

I. Introduction :

Commander un système c’est trouver les entrées du système (la loi de commande) pour satisfaire les performances désirées.

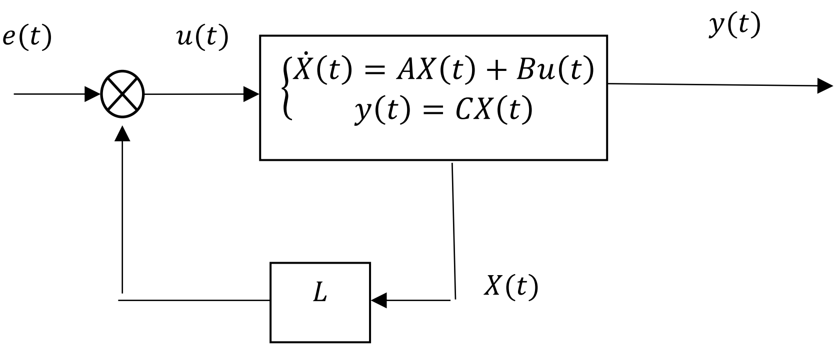
Les performances sont en nombre de trois : la stabilité, la précision et la rapidité.

D’après le chapitre 1, nous pouvons remarquer que si la dimension de l’espace d’état égale au degré de la fonction de transfert nous avons l’équivalence entre pôle et valeur propre.

Dans le principe de la méthode de commande par placement de pôle, le choix des pôles dans l’espace complexe permet de bien fixer le degré de stabilité et la rapidité (la dynamique du système). En utilisant le même principe et par l’analogie qu’on vient de citer entre pôle et valeur propre, nous pouvons dire que le choix des valeurs propres dans le plan complexe permet de bien fixer le degré de stabilité et rapidité désirée. On essaye donc de traduire le cahier des charges (au point de vue stabilité et rapidité : dynamique du système) en un choix des valeurs propres désirées.

II. Commande par retour d’état (Modale)

Le principe de la commande est de trouver une transformation (un bouclage) pour la boucle fermée possède les valeurs propres désirées. Soit le bouclage suivant :



Soit :

$$u(t) = e(t) - LX(t)$$

avec

$X(t) = (x_1 \ \ \dots \ \ x_n)^t$: Le vecteur état

$L = (l_1 \ \ \dots \ \ l_n)$: Le vecteur gain du retour d’état

La représentation d'état de la boucle fermée est :

$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(e(t) - LX(t))$$

$$\dot{X}(t) = (A - BL)X(t) + Be(t)$$

la matrice d'état de la boucle fermée est : $A_{BF} = (A - BL)$

Donc tout le problème consiste de trouver le gain $L = (l_1 \ \ldots \ l_n)$ pour la matrice d'état de la boucle fermée qui possède les valeurs propres désirées.

1. **Existence de *L***

Un système est complètement commandable alors L existe.

Pour le cas d'un système mono-variable (mono-entrée) si L existe il est unique.

2. **Calcul de la commande pour le cas d'un système sous la forme canonique de commandabilité**

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - BL = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 - l_1 & -a_1 - l_2 & \cdots & -a_{n-2} - l_{n-1} & -a_{n-1} - l_n \end{pmatrix}$$

La représentation d'état de la boucle fermée est aussi sous la forme canonique de commandabilité. Donc nous pouvons déduire sans calcul son polynôme caractéristique. Par identification avec le polynôme caractéristique désirée nous pouvons déduire facilement le gain du retour d'état.

Exercice 1 :

Un système linéaire continu est donné par sa représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} U \\ Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1. Etudier la stabilité du système.
2. Etudier la commandabilité du système.
3. Etudier l'observabilité du système.
4. Montrer que la fonction de transfert du système est : $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p+3}{(p-1)(p+2)}$
5. Soit la commande par retour d'état suivante :

$$U(t) = E(t) - LX(t)$$

   a) Peut –on utiliser cette commande pour avoir la dynamique désirée suivante :

   $$P_{cd}(p) = (p+1)^3$$

   Expliquer.

   b) Si oui, calculer le retour d'état $L = (l_1 \quad l_2 \quad l_3)$.

Exercice 2 :

Un navire de 10 m de longueur en mouvement latéral avec une vitesse de 10 m/s est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ r \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta$$

Où ϑ est l'angle de direction du navire. δ est la force motrice commandant le navire.

1. Déterminer la fonction de transfert du système reliant la commande δ à la sortie ϑ ; les conditions initiales étant nulles. En déduire que le système est totalement commandable et observable.
2. Le système est-il stable ? En utilisant le retour d'état : $\delta = \vartheta_d - k_1\beta - k_2 r - k_3\vartheta$, où ϑ_d est l'angle de direction désiré, déterminer $k_1, k_2, et\ k_3$ permettant de placer les pôles en boucle fermée à -1 (pôle triple).

3. L'angle de direction ϑ est mesuré par un capteur approprié (gyrocompas). On cherche alors à estimer l'état du système. On procède par observateur continu. Donner le schéma de l'ensemble du système commandé avec son observateur.
4. Déterminer la matrice de gain de l'observateur dont la dynamique est régie par les pôles : -3 (pôle triple).

Chapitre V :

Synthèse des observateurs

Chapitre IV :

Synthèse des observateurs

I. Introduction

Il arrive souvent que le vecteur variable de l'espace d'état ne soit pas mesurable pour différentes raisons (impossibilité pratique, coût des capteurs trop élevé, accessibilité…). Lorsqu'une partie de l'état n'est pas disponible à la mesure, il devient primordial de pouvoir en donner une estimation. Ceci peut être réalisé par la construction d'un autre système dynamique appelé observateur dont le rôle est de produire une estimée satisfaisante des variables d'état du système réel.

II. Synthèse d'un observateur

Un système linéaire continu est donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \\ \quad y(t) = CX(t) \end{cases}$$

avec $\dim\big(X(t)\big) = n$

l'objectif est d'estimer $X(t)$, soit $\hat{X}(t)$ l'estimé de $X(t)$, par la suite

$$\dim\left(\hat{X}(t)\right) = \dim\big(X(t)\big) = n$$

Nous allons estimer l'état en observant le couple entrée sortie du système en plus la dynamique de l'état est donnée par une équation différentielle d'ordre 1.

Donc l'observateur d'état est de la forme suivante :

$$\hat{X}(t) = F\hat{X}(t) + J.u(t) + Ky(t)$$

Tout le problème consiste donc de chercher $F, J\ et\ K$ pour que l'état estimé converge vers l'état réel du système.

Soit $e(t) = \hat{X}(t) - X(t)$, par la suite ;

$$\dot{e}(t) = \dot{\hat{X}}(t) - X(t)$$

$$= F\hat{X}(t) + J.u(t) + Ky(t) - AX(t) - Bu(t)$$

$$\dot{e}(t) = (F - A + KC)X(t) + (B - J)u(t)) + (A - KC)e(t)$$

pour que le vecteur erreur converge vers 0 lorsque $t \ \rightarrow \infty\ \forall\ u(t) et\ X(t)$ il faut :

$$\begin{cases} F = A - KC \\ A - KC\ soit\ asymptotiquement\ stable \\ J = B \end{cases}$$

Finalement l'observateur de l'état est donné par :

$$\boxed{\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t))}$$

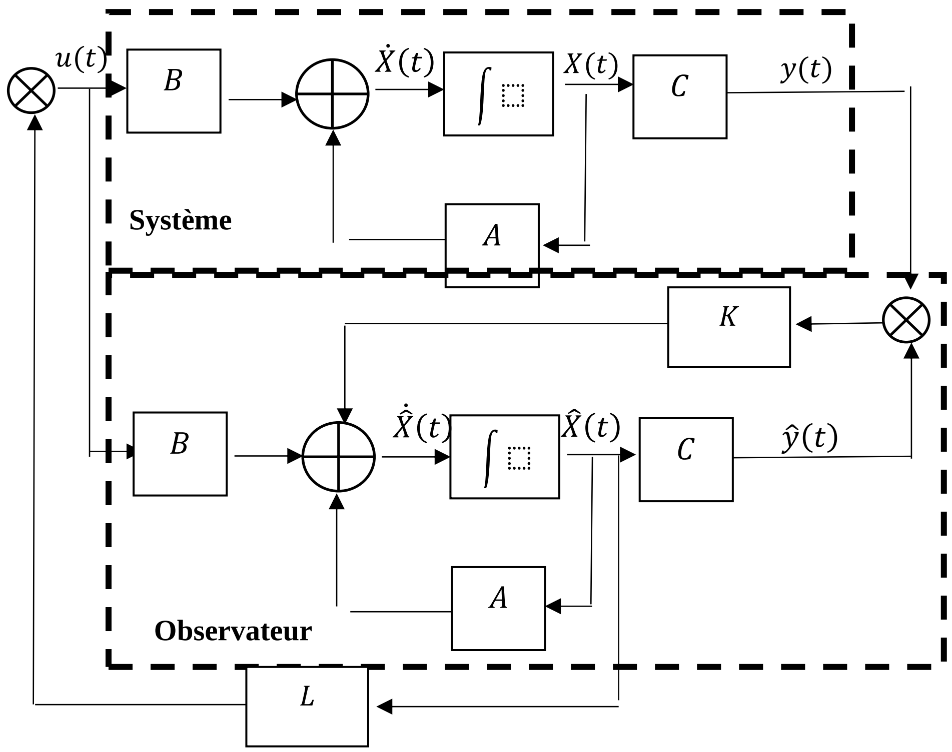
III. Bilan : Système + Observateur + Commande

Dans le chapitre précédent nous avons proposé une commande par retour d'état :

$$u(t) = -LX(t)$$

On est dans le cas où le vecteur de l'état n'est pas mesurable, par la suite on ne peut pas parler de $X(t)$ mais plutôt de $\hat{X}(t)$ donc :

$$u(t) = -L\hat{X}(t)$$



dans la suite nous allons étudier les répercussions de l'utilisation de $\hat{X}(t)$ au lieu de $X(t)$ sur la dynamique du système et le calcul du vecteur gain du retour d'état.

On a :

$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec $u(t) = -L\hat{X}(t)$

$\dot{X}(t) = AX(t) + B(-LA\hat{X}(t) + Bu(t) + K(y(t) - \hat{y}(t))$

soit $Z(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$ le vecteur état qui représente le système global (Système +Observateur)

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BL & -BL \\ & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ e(t) \end{pmatrix}$$

Constatation :

1. Il est remarquable que le calcul du gain du retour d'état L n'est pas affecté par l'utilisation de $\hat{X}(t)$ par $X(t)$
2. La dynamique du système globale est l'ensemble de deux dynamiques (la dynamique désirée et la dynamique de l'observateur), par la suite il est nécessaire de choisir la dynamique de l'observateur nettement plus rapide que celle désirée.

Références Bibliographiques

- Gonzalo Cabodevila , « Analyse et correction des Systèmes linéaires continus ou échantillonnés à l'aide des variables d'état » Cours à École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, 2008
- C. Vachier, Représentation d'état et commande dans l'espace d'état, notes de cours, UNIVERSITÉ PARIS XII-VAL DE MARNE, 2007
- Bordebeuve-Guibé, Représentation d'état des systèmes linéaires, Polycopié de cours, ENSICA, 1997.
- Y. Granjon, AUTOMATIQUE Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état, 2 e édition, Dunod, Paris, 2010